

Correction DS1

1) ACM

- la suite (u_n) converge
- $\frac{1}{n} \cdot u_n$ est croissante d'où (u_n) est majorée par 1
- $a_n \leq 10000$
- $\frac{1}{n}$: la suite (u_n) converge
- $\frac{1}{n}$: convergence vers 1.

2) Déterminer l'indéterminable

$$\lim_{n \rightarrow \infty} -7n^2 - 12n + 2 = -\infty \quad \text{par quotient,} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 + 3n + 2025 = +\infty \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \text{FI (de type } \frac{\infty}{\infty})$$

$$x_n = \frac{n^2(-7 - \frac{12}{n} + \frac{2}{n^2})}{n^2(\frac{1}{n} + 3 + \frac{2025}{n^2})} = \frac{-7 - \frac{12}{n} + \frac{2}{n^2}}{\frac{1}{n} + 3 + \frac{2025}{n^2}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} -7 = -7 \quad \text{par donnée} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{12}{n} = 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n^2} = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} -7 - \frac{12}{n} + \frac{2}{n^2} = -7 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + 3 + \frac{2025}{n^2} = 3 \end{array} \right\} \text{par quotient}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{-7}{3}$$

3) FAQ ou prépa

- a) 0,9 s'interprète comme à 10% des questions posées étaient supprimées
1,3 s'interprète comme s'il y avait 130 nouvelles questions posées
- b) $u_2 = 0,9u_1 + 1,3 = 0,9 \times 3 + 1,3 = 4$
Le 2^{ème} mois, il y a 400 questions sur le site
- c) Montrons par récurrence: $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 13 - \frac{100}{9} \times 0,9^n$
Initialisation: $13 - \frac{100}{9} \times 0,9^1 = 3 = u_1$ donc $P(1)$ est vraie.

4) Quand brutes et fonctions se rencontrent

- a) $u_1 = f(u_0) = f(\frac{1}{2}) = \frac{4 \times \frac{1}{2}}{1 + 3 \times \frac{1}{2}} = \frac{2}{5/2} = \frac{4}{5}$
- b) f est définie sur $]-\frac{1}{3}, +\infty[$ (et n'est pas définie en $x = -\frac{1}{3}$).
 $\forall x \in]-\frac{1}{3}, +\infty[, f(x) = \frac{4(1+3x) - 4x \times 3}{(1+3x)^2} = \frac{4}{(1+3x)^2}$

x	$-\frac{1}{3}$	$+\infty$
$\frac{4}{(1+3x)^2}$	+	+
$f(x)$	+	+
$\frac{4}{5}$		

- c) a) Montrons par récurrence: $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$

Initialisation: $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \leq \frac{4}{5} \leq 2$ donc $P(1)$ est vraie.

Hérédité: On suppose que pour un certain $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie:
 $\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$ [hypothèse de récurrence]

Montrons que $P(n+1)$ est vraie: $\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 2$.

Par hypothèse de récurrence, $\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$

$\Rightarrow f(\frac{1}{2}) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(2)$ car f est croissante sur $]-\frac{1}{3}, +\infty[$

or $f(\frac{1}{2}) = \frac{4}{5}$ et $f(2) = \frac{4 \times 7}{1 + 3 \times 7} = \frac{8}{7}$

$\Rightarrow \frac{4}{5} \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \frac{8}{7}$

on a $\frac{4}{5} \geq \frac{1}{2}$ et $\frac{8}{7} \leq 2$ donc $\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 2$.

Conclusion: $P(n)$ est vraie pour $n=0$ et cette propriété est héréditaire à partir de ce rang donc $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$.

b) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}$ donc (u_n) est croissante d'après la théorie

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 2$ donc (u_n) est majorée (par 2) de convergence monotone, (u_n) converge.

c) Soit $l = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$

On a: $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1} = l$, $\lim_{n \rightarrow \infty} 4u_n = 4l$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} 1+3u_n = 1+3l$
donc par quotient, on a: $l = \frac{4l}{1+3l} \Leftrightarrow l(1+3l) = 4l$

Hérédité: On suppose, pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$ est vraie, à savoir $u_n = 13 - \frac{100}{9} \times 0,9^n$ [hypothèse de récurrence]
On veut montrer que $P(n+1)$ est vraie, à savoir:
 $u_{n+1} = 13 - \frac{100}{9} \times 0,9^{n+1} = 0,9u_n + 1,3$

On $u_{n+1} = 0,9u_n + 1,3$

$$= 0,9 \times (13 - \frac{100}{9} \times 0,9^n) + 1,3 \text{ par hypothèse de récurrence} \\ = 11,7 - \frac{100}{9} \times 0,9 \times 0,9^n + 1,3 \\ = 13 - \frac{100}{9} \times 0,9^{n+1}$$

Conclusion: $P(n)$ est vraie au rang $n=1$ et cette propriété est héréditaire à partir de ce rang donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 13 - \frac{100}{9} \times 0,9^n$

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n = 13 - \frac{100}{9} \times 0,9^{n+1} - (13 - \frac{100}{9} \times 0,9^n)$
 $= \frac{100}{9} \times 0,9^n (-0,9 + 1) = \frac{100}{9} \times 0,9^n \times 0,1$

donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n > 0 \Leftrightarrow u_{n+1} > u_n$
donc la suite (u_n) est croissante.

c) Seul (8,5) renvoie 9 car $u_2 \approx 8,2$ et $u_3 \approx 8,7$
donc au bout de 9 mois, il y aura plus de 850 questions sur le site!

d) $u_1 = 9 - 4,96 \times 0,83^1 \approx 4,88$
 $u_2 = 9 - 4,96 \times 0,83^2 \approx 5,58$

e) $u_2 = 8,47$ et $u_3 \approx 8,56$ donc $u_n > 8,5$ à partir de $n=13$.

f) a) $u_n > 8,5$ pour $n \geq 9$ et $v_n > 8,5$ pour $n \geq 12$ donc c'est avec la 1^{ère} modélisation que la modification arrive le plus tôt.

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} 0,9^n = 0$ car $-1 < 0,9 < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{100}{9} \times 0,9^n = 0$
Par somme, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 13 - 0 = 13$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} 0,83^n = 0$ car $-1 < 0,83 < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow \infty} 4,96 \times 0,83^n = 0$
Par somme, $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 9 - 0 = 9$

Sur le long terme, c'est donc la 1^{ère} modélisation qui amènera au plus grand nombre de questions. (13 > 9).

g) $\Leftrightarrow l(1+3l) - 4l = 0 \Leftrightarrow l(1+3l-4) = 0 \Leftrightarrow l(3l-3) = 0$
donc $l=0$ ou $3l-3=0 \Leftrightarrow l=1$.
or $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq \frac{1}{2}$ donc $l=0$ est impossible donc $l=1$.

h) a) def $\text{seuil}(E)$:
 $n=0$
 $u=0,5$
while $(1-u \geq E)$:
 $u = 4 \times u / (1+3 \times u)$
 $n = n+1$
return (n) .

b) Si $E = 10^{-4}$, le programme renvoie 7
 $(1 - u_7 \approx 0,0002 > 10^{-4})$
 $(1 - u_8 \approx 4,00006 < 10^{-4})$

i) a) $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \frac{4u_n}{1+3u_n} = \frac{4u_n}{1+3u_n} = \frac{4u_n}{1+3u_n} \times \frac{1+3u_n}{1+3u_n} = \frac{4u_n}{1+3u_n}$
 $= \frac{4u_n}{1+3u_n} = 4 \times \frac{u_n}{1+3u_n} = 4v_n$

donc (v_n) est géométrique de raison $Q=4$ avec $v_0 = \frac{u_0}{1+3u_0} = \frac{1/2}{1+3 \times 1/2} = \frac{1}{5}$
donc $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = v_0 \times Q^n = \frac{1}{5} \times 4^n = 4^n$

b) $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{u_n}{1+3u_n} \Leftrightarrow v_n(1+3u_n) = u_n \Leftrightarrow v_n + 3v_n u_n = u_n$
 $\Leftrightarrow u_n - 3v_n u_n = v_n \Leftrightarrow u_n(1-3v_n) = v_n \Leftrightarrow u_n = \frac{v_n}{1-3v_n}$

c) donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{4^n}{4^n + 1} = \frac{4^n}{4^n(1 + \frac{1}{4^n})} = \frac{1}{1 + \frac{1}{4^n}} = \frac{1}{1 + 0,25^{-n}}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} 0,25^{-n} = 0$ car $-1 < 0,25 < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + 0,25^{-n}} = \frac{1}{1+0} = 1$
donc par quotient, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \frac{1}{1} = 1$